9° Μάθημα:

7/5/2019

Κεφ: 4°

Παρεμβολή με συναρτήσεις Spline:

Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις:

Έστω $f \in C[a,b]$ Θεωρούμε το σύνολο
$X_n = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \}$.
Παίρνουμε το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής Laugrande σε κάθε υποδιάστημα.

Έστω $h_i = x_{i+1} - x_i$

$$p(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad i = 0,1,\dots,n-1$$

$$p(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} x + \frac{x_{i+1} \cdot f_i - x_i \cdot f_{i+1}}{h_i} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad i = 0,1,\dots,n-1.$$

Παρεμβολή με συναρτήσεις Hermite:

Έστω $f \in C^1[a,b]$ Θεωρούμε τη διαμέριση
$X_n = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$
Τότε το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite της f στο X_n είναι τέτοιο ώστε $h(x_i) = f(x_i)$ και $h'(x_i) = f'(x_i)$

Αποδεικνύεται ότι: το h είναι πολυώνυμο το πολύ $2n+2$ βαθμού

Πρόταση: Ο χώρος των τμηματικά γραμμικών συναρτήσεων έχει διάσταση $n+1$

Αποδ:

α' τροπος: Σε καθε διαστημα εχουμε ένα γραμμικό πολυώνυμο με διάσταση 2 επί n διαστήματα διάστασης 2n μείον n-1 οι περιορισμοί συνέχειας στα ενδιάμεσα σημεία.

Η διάσταση του χώρου L_n των τμηματικά γραμμικών συναρτήσεων είναι $2n-(n-1)=n+1$

β' τροπος: Πόσες πληροφορίες χρειάζονται για τον υπολογισμό ενός στοιχείου του L_n?

Απάντηση: οι τιμές της f στα σημεία x_i $i=0,1,\dots,n$

διάσταση του χώρου $n+1$.

διάσταση του χώρου των πολυωνύμων Hermite

Ορίζουμε: H_n ο χώρος των $2n+2$.

στο X_n. Διάσταση H_n

Παρεμβολή με τμηματικά κυβικές συναρτήσεις Hermite.

Παρεμβολή με τμηματικά σημείων.

Έστω $f \in C^1[a,b]$ και το σύνολο σημείων

$X_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

Ορίζουμε ως τμηματικά κυβική παρεμβολή Hermite της f στο X_n ως

$h(x) \in C^1[a,b]$ τέτοια ώστε

$h(x_i) = f(x_i)$

$h'(x_i) = f'(x_i)$

$i=0,1,\dots,n$.

και $h \in P_3$ στο $[x_i, x_{i+1}]$ $i=0,1,\dots,n$

Διάσταση του Χώρου H_n των τμηματικά κυβικών συναρτήσεων Hermite:

Είναι 4 η διάσταση του κάθε πολυωνύμου και n διαστήματα έχουμε 4n
Αφαιρούμε 2(n-1) περιορισμούς ασυνέχειας και συνέχειας της παραγώγου στους ενδιάμεσους κόμβους
Έτσι διάσταση $4n-2(n-1)=2n+2$

Υπολογισμός του h(x) στο [a,b]

$$h(a)=f(a) \qquad h'(a)=f'(a)$$
$$h(b)=f(b) \qquad h'(b)=f'(b)$$

Είναι ισοδύναμο με τις πληροφορίες

$$h(a)=f(a) \qquad f(b)=h(b)$$
$$h(a+\varepsilon)=f(a+\varepsilon) \qquad h(b-m)=f(b-m)$$

για $\varepsilon, n>0$ να τείνουν στο μηδέν

Θεωρώ το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα 4 αυτά σημεία είναι:

$$h(x,\varepsilon,n)=\underbrace{\frac{(x-a-\varepsilon)(x-b+n)(x-b)}{-\varepsilon\cdot(a-b+n)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b+n)(x-b)}{\varepsilon(a+\varepsilon-b+n)(a+\varepsilon-b)}f(a+\varepsilon)}_{h_1(x,\varepsilon,n)}+$$

$$+\underbrace{\frac{(x-a)(x-a-\varepsilon)(x-b)}{(b-n-a)(b-n-a-\varepsilon)(-n)}f(b-n)+\frac{(x-a)(x-a-\varepsilon)(x-b+n)}{(b-a)(b-a-\varepsilon)n}f(b)}_{h_2(x,\varepsilon,n)}$$

$$A = \frac{\dfrac{f(a+b)}{(a+\varepsilon-b+u)(a+\varepsilon-b)} - \dfrac{f(a)}{(a-b+u)\cdot(a-b)}}{\varepsilon}$$

$$B = \frac{(x-b+u)(x-b)}{(a-b+u)(a-b)}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h_1(x,\varepsilon,u) = (x-a)(x-b-u)(x-b)\left[\frac{f(a)}{(a-b-u)(a-b)}\right]' + B\cdot f(a)$$

$$\left[\frac{f(a)}{(a-b-u)(a-b)}\right]' = \frac{f'(a)}{(a-b-u)(a-b)} - \frac{f(a)}{(a-b-u)^2(a-b)} - \frac{f(a)}{(a-b-u)(a-b)^2}$$

$$h_1(x) = \lim_{\varepsilon,u \to 0} h_1(x,\varepsilon,u) = \left[-\frac{2(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^3} + \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2}\right]\cdot f(a) + \frac{(x-a)(x-b)^2}{(a-b)}\cdot f'(a) =$$

$$= \left[\frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} + \frac{2(x-a)(x-b)^2}{(b-a)^3}\right] f(a) + \frac{(x-a)(x-b)^2}{(b-a)^2}\cdot f'(a)$$

$$h_2(x) = \left[\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2} - \frac{2(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^3}\right] f(b) + \frac{(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^2}\cdot f'(b)$$

$$\Delta X_i = X_{i+1} - X_i$$

$$h(x) = \left[(x - x_{i+1})^2 + \frac{2(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^3} \right] \cdot f(x_i) +$$

$$+ \frac{(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} \cdot f'(x_i) +$$

$$+ \left[\frac{(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^3} - 2\frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^3} \right] f(x_{i+1})$$

$$+ \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} \cdot f'(x_{i+1}) \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$i = 0,1,\dots,n-1$$

ο συγκεκριμένος τύπος στις εξετάσεις θα μας δίνεται

Άσκηση 2 σελίδα 81:

Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση Hermite της $f(x) = x^5 - 4x^3$ στο σύνολο $[0,1,2,3]$ δ.λ. $[0,3]$

Λύση:

$f(x) = x^5 - 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 12x^2$

Φτιάχνουμε τον πίνακα:

x_i	0	1	2	3
f_i	0	-3	-32	-81
f'_i	0	-11	-48	-27

1η περίπτωση: $x \in [0,1]$

$\Delta x_i = 1 - 0 = 1$

$$h(x) = \left[(x-1)^2 + 2x\cdot(x-1)^2\right] 0 + x(x-1)^2 \cdot 0 +$$

$$+ \left[x^2 - 2(x-1)\cdot x^2\right](-3) + (x-1)\cdot x^2 \cdot (-11)$$

$$= -5x^3 + 2x^2$$

$2^{\text{η}}$ περίπτωση: $x \in [1,2]$

$\Delta x_i = 2-1 = 1$

$$h(x) = \left[(x-2)^2 + 2(x-1)(x-2)^2\right](-3) + (x-1)(x-2)^2(-11)$$

$$+ \left[(x-1)^2 - 2(x-2)(x-1)^2\right](-32) + (x-2)(x-1)^2(-48)$$

$$= -x^3 - 14x^2 + 20x - 8$$

$3^{\text{η}}$ περίπτωση: $x \in [2,3]$

$\Delta x_i = 3-2 = 1$

$$h(x) = \left[(x-3)^2 + 2(x-2)(x-3)^2\right](-32) + (x-2)(x-3)^2(-48)$$

$$+ \left[(x-2)^2 - 2(x-3)(x-2)^2\right](-81) + (x-3)(x-2)^2 \cdot (-27)$$

$$= 23x^3 - 162x^2 + 324x - 216.$$